5 吴锡浩, 钱 方. 格尔木河水系河谷地貌. 见: 青藏高原地质文集(4). 北京: 地质出版社, 1982. 51~70
6 李长安, 骆满生, 于庆文, 等. 东昆仑晚新生代沉积、地貌与环境变化初步研究. 地球科学——中国地质大学学报, 1997, 22(4): 343~346
7 王苏民, 夏威岚, 钱君龙, 等. 若尔盖盆地 RM 孔的沉积特征与构造-气候演化的过程. 见: 学术论文年刊(1995). 北京: 科学出版社, 1996. 112~117

(1998-01-04 收稿, 1998-04-24 收修改稿)

强迫耗散非线性大气方程的计算稳定性

李建平[①] [*] 丑纪范[①②]

(①兰州大学大气科学系, 兰州 730000; ②北京气象学院, 北京 100081;
* 现地址: 中国科学院大气物理研究所 LASG, 北京 100080)

摘要 提出计算准稳定的新概念来研究强迫耗散非线性发展方程的计算稳定性, 给出强迫耗散非线性大气方程组的差分格式计算准稳定的判据, 为设计强迫耗散非线性大气方程组计算稳定的差分格式提供了理论依据.

关键词 计算稳定性 计算准稳定性 算子方程 差分格式 强迫耗散非线性方程

数值的求解非线性大气和海洋动力学方程组, 就要设计计算稳定的数值格式. 对于绝热的或无耗散的非线性发展方程计算稳定性, 曾庆存等人[1~5]做了大量工作. 然而, 对于强迫耗散的非线性发展方程由于其固有的困难, 目前对它尚缺乏计算稳定性分析, 而研究强迫耗散的非线性发展方程的计算稳定性确实是非常重要的. 本文提出了计算准稳定的新概念, 并在此基础上研究了强迫耗散的非线性发展方程的计算稳定性问题.

1 基本描述和计算准稳定性概念

完整的强迫耗散非线性大气方程组可化为 Hilbert 空间中如下等价的算子方程[6]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + N(\varphi)\varphi + L(\varphi)\varphi = \xi, \tag{1}$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{2}$$

其中 $N(\varphi)$ 为反伴算子, $L(\varphi)$ 为自共轭正算子, 即

$$N^*(\varphi) = -N^*(\varphi), \quad (N(\varphi)\varphi, \varphi) = 0, \tag{3}$$

$$L^*(\varphi) = L^*(\varphi), \quad (L(\varphi)\varphi, \varphi) \geqslant 0, \tag{4}$$

式(4)中等号当且仅当 $\|\varphi\| = 0$ 时成立.

利用差分法求(1), (2)式的近似解. 令时间步长为 τ, 空间步长为 h, 布网 $(mh, n\tau)$, 记 φ 在时刻 t_n 上的值为 φ^n. 定义网格函数的内积为

$$(\varphi, \phi) = \sum_m \varphi_m \phi_m \Delta_m, \tag{5}$$

其中 φ, ϕ 为任意两个抽象函数(通常为向量函数), φ_m, ϕ_m, Δ_m 分别为第 m 网格点上 φ, ϕ 的值及单元体积, 函数 φ 的范数定义为

$$\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}. \tag{6}$$

在 Hilbert 空间中的反对称算子在 R^n 空间中对应的就是反对称矩阵, 而对称正算子对应的就是对称正矩阵. 令算子 $N(\varphi)$ 和 $L(\varphi)$ 离散化的一般形式分别为 $N(\varphi^*)$ 和 $L(\varphi^*)$, 那么 $N(\varphi^*)$ 是反对称矩阵, $L(\varphi^*)$ 是对称正矩阵.

要研究形如(1)式的方程的计算稳定性是比较困难的, 一般研究的是 $\xi\equiv0$ 情形[1~4]. 对于 $\xi\neq0$ 的情形结果很少, 因此, 对于 $\xi\neq0$ 的情形, 有必要放宽条件, 引入如下计算准确定性的概念.

定义 1 若当 τ 足够小时, 差分法计算(1), (2)式得到的解满足

$$\|\varphi^{n+1}\|\leqslant\|\varphi^n\|+\tau c, \tag{7}$$

其中 c 为与 $\|\xi\|$ 有关的常数, 则称差分格式为计算准稳定的.

显然, 计算准稳定是计算稳定的必要条件, 凡是不满足计算准稳定的格式, 必是计算不稳定的. 当 $\xi\equiv0$ 时或当 $\tau\to0$ 时的计算准稳定性就是计算稳定性.

2 主要结果

给出方程(1)普遍的差分格式为

$$\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau}+N(\varphi^*)[a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n]+L(\varphi^*)[a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n]=\xi,\ 0\leqslant a\leqslant1. \tag{8}$$

定理 1 方程(1)的差分格式(8), 当 $1/2\leqslant a\leqslant1$ 时是计算准稳定的.

证 对(8)式两边与 $a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n$ 作内积, 利用 $N(\varphi^*)$ 和 $L(\varphi^*)$ 的性质有

$$\left(\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau},\ a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n\right)\leqslant(\xi,\ a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n),$$

即

$$\begin{aligned}a\|\varphi^{n+1}\|^2\leqslant&(1-a)\|\varphi^n\|^2+(2a-1)(\varphi^n,\ \varphi^{n+1})+\tau(\xi,\ a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^n)\leqslant\\&(1-a)\|\varphi^n\|^2+\frac{2a-1}{2}\|\varphi^n\|^2+\frac{2a-1}{2}\|\varphi^{n+1}\|^2+\\&a\tau\|\xi\|\ \|\varphi^{n+1}\|+(1-a)\tau\|\xi\|\ \|\varphi^n\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|\varphi^{n+1}\|^2-2a\tau\|\varphi^{n+1}\|\ \|\xi\|\leqslant\|\varphi^n\|^2+2(1-a)\tau\|\varphi^n\|\ \|\xi\|.$$

从而当 $1/2\leqslant a\leqslant1$, 有

$$\begin{aligned}&\|\varphi^{n+1}\|^2-2a\tau\|\varphi^{n+1}\|\ \|\xi\|+a^2\tau^2\|\xi\|^2\leqslant\\&\|\varphi^n\|^2+2(1-a)\tau\|\varphi^n\|\ \|\xi\|+a^2\tau^2\|\xi\|^2\leqslant\\&\|\varphi^n\|^2+2a\tau\|\varphi^n\|\ \|\xi\|+a^2\tau^2\|\xi\|^2,\end{aligned}$$

即

$$\|\varphi^{n+1}\|\leqslant\|\varphi^n\|+2a\tau\|\xi\|\leqslant\|\varphi^n\|+\tau c,$$

其中 $c=2\|\xi\|$, 所以当 $1/2\leqslant a\leqslant1$ 时(8)式是计算准稳定的. 证毕.

特别地, 当 $\xi\equiv0$ 时, 有 $c=0$, 所以

$$\|\varphi^{n+1}\|\leqslant\|\varphi^n\|,$$

格式是计算稳定的.

对于非线性问题来说,其线性化方程所得的稳定性判据也有一定的参考意义. 所以,对式(1)的线性化方程也作一点补充分析. 方程(1)的线性方程为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+N(\overline{\varphi})\varphi+L(\overline{\varphi})\varphi=\xi, \tag{9}$$

其差分格式为

$$\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^{n}}{\tau}+(N(\overline{\varphi})+L(\overline{\varphi}))(a\varphi^{n+1}+(1-a)\varphi^{n})=\xi. \tag{10}$$

定理 **2** 方程(9)的差分格式(10)当 $1/2\leqslant a\leqslant 1$ 时是计算稳定的.

证 令 φ_1, φ_2 为(10)式的任意两个解

$$\varepsilon^{i}=\varphi_1^{i}-\varphi_2^{i},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则

$$\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}}{\tau}+(N(\overline{\varphi})+L(\overline{\varphi}))(a\varepsilon^{n+1}+(1-a)\varepsilon^{n})=0.$$

于是可得当 $1/2\leqslant a\leqslant 1$ 时有

$$|\varepsilon^{n+1}|\leqslant|\varepsilon^{0}|.$$

格式是计算稳定的.

根据上面的结果,当 $1/2\leqslant a\leqslant 1$ 时,对于线性(有外源)或无外源(有非线性)的情形,格式(8)是计算稳定的,而对于非线性有外源的情形,格式(8)是计算准稳定的. 因此,在不考虑舍入误差的情形下,非线性相互作用及外源的影响是引起计算准稳定格式误差传播的主要因素.

由于强迫耗散非线性发展方程计算稳定性的复杂性,本文提出计算准稳定的新概念来对它进行研究. 给出了强迫耗散非线性大气方程组的差分格式计算准稳定性的判据,这个判据又是线性化方程组及无外源情形下计算稳定的判据,而计算准稳定又是计算稳定的必要条件,所以计算稳定的格式必在这个判据中,这就为设计强迫耗散非线性大气方程组计算稳定的差分格式提供了必要的理论依据.

致谢 本工作为"攀登预21"资助项目.

参 考 文 献

1 曾庆存. 计算稳定性的若干问题. 大气科学, 1978, 2(3): 181~191
2 曾庆存, 季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题. 计算数学, 1981, 3(1): 79~86
3 季仲贞. 非线性计算稳定性的比较分析. 大气科学, 1981, 4(4): 344~354
4 Zeng Qingcun, Ji Zhongzhen, Yuan Chongguang. Designs of difference schemes for the primitive equation. Scientia Sinica (Ser B), 1982, 25(2): 183~199
5 季仲贞, 王 斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 大气科学, 1991, 15(2): 72~78
6 Li Jianping, Chou Jifan. Further study on the properties of operators of atmoshperic equations and the existence of attractor. Acta Meteor Sinica, 1997, 11(2): 216~223

(1998-03-04 收稿, 1998-05-27 收修改稿)